# Часть I. ВВЕДЕНИЕ

Дается общая характеристика математических моделей. На простейшем примере выявляются основные принципы построения математических моделей. Описываются различные типы математических моделей. Приводятся некоторые примеры математические моделей, относящиеся к классической механике.

## 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, – я разумею Вселенную, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески ее слова; без них – тщетное кружение в темном лабиринте.*

Галилео ГАЛИЛЕЙ

В первой лекции нашего курса мы попытаемся взглянуть на математическое моделирование как на специфическую форму познания окружающего мира. Любое представление исследователя об изучаемом объекте является его моделью. Нас будут интересовать исключительно модели, сформулированные на математическом языке. Именно они служат связующим звеном между абстрактной Математикой и окружающим нас реальным миром. Мы попытаемся выявить некоторые особенности математического моделирования и разобраться в общих принципах построения моделей. В качестве примера рассматривается классическая задача о падении тела под действием собственного веса. Описываются важнейшие типы математических моделей. В приложении приводятся ряд достаточно простых, но далеко не тривиальных математических моделей движения тела в поле силы тяготения.

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Познание и моделирование**

В основе данного курса лежит понятие математической модели – поразительной формы представления всевозможных явлений, протекающих в природе и обществе. Само по себе моделирование предполагает активное взаимодействие Человека с окружающим миром и неизбежно выводит нас к общей проблеме познания. Процесс познания непременно обусловлен наличием объекта познания, т.е. предмета исследования и исследователя – познающего субъекта.

Исследователь изучает интересующий его объект, наблюдает за ходом развития событий, а возможно, и активно вмешивается в них, задавая те или иные вопросы и получая на них соответствующие ответы. Установив некоторую информацию о предмете исследования, субъект формирует своё представление об интересующим его объекте, своё видение изучаемого явления. Это представление, основанное на имеющейся объективной информации о предмете познания и отражающее субъективную точку зрения исследователя, и будет ***моделью*** изучаемого объекта (см. Рис. 1.1). Таким образом, процесс познания, фактически сводящийся к сбору, хранению и переработке всевозможной ***информации*** о рассматриваемом объекте, является в то же самое время и процессом моделирования. По-видимому, для нас и нет особой необходимости различать эти два, на первый взгляд, совершенно разных термина.



Рис. 1.1. Упрощенная схема процесса познания.

Существуют различные типы познания окружающего мира, различные способы восприятия нами действительности. Сюда относятся наука, философия, религия, литература, искусство... Казалось бы, что между ними может быть общего? Ученый настойчиво изучает строение атома и возникновение крепостного права. Философ упорно пытается постигнуть смысл Бытия и место Человека в этом удивительном мире. Религиозный мыслитель напряженно ищет проявление Вечного в Человеке и сосредоточенно размышляет над откровением Божьим. Писатель сочиняет детективный роман или высокую трагедию. Художник изображает закат у моря и рисует портрет возлюбленной. Композитор пишет героическую симфонию, легкомысленный шлягер или похоронный марш...

Каждый из них по-своему воспринимает действительность и пытается имеющимися средствами выразить собственное видение окружающего мира. Все они вольно или невольно занимаются моделированием, а их профессиональная деятельность неизменно сводится к переработке некоторой информации. Имеющиеся различия определяются лишь выбором предмета исследования и формы представления информации. Проблемы, непосредственно стоящие перед нами в данном курсе, относятся лишь к одной из форм мировосприятия, к одному из многообразных типов моделирования.

***Модель объекта есть представление о нем, отражающее субъективную точку зрения исследователя на основе имеющейся объективной информации.***

#### **2. Естествознание и математика**

Нас, конечно же, будет интересовать исключительно научное познание всевозможных объектов с помощью математического аппарата. В связи с этим хотелось попытаться в какой-то степени понять особенности Математики и ее взаимоотношения с другими наукам[[1]](#endnote-1).

Физика и химия, биология и психология, социология и археология имеют конкретные более или менее четко выраженные области приложения. Лазерное излучение и синтез ацетилена, строение клетки и принцип частной собственности, эрозия почвы и закат Римской империи связаны с реальными и вполне осязаемыми объектами. Их можно и должно изучать, поскольку за ними стоит окружающий мир, воспринимаемый нашими органами чувств. Математики же, напротив, имеют дело исключительно с абстрактными понятиями – числом, функцией, множеством, операцией и т.п., которые сами по себе в природе не существуют, а являются лишь своеобразными продуктами человеческого мозга. Если предметом обычных наук является объективно существующая материальная реальность, то Математика оперирует исключительно с идеальным миром человеческих идей[[2]](#endnote-2).

Каждая из обычных наук имеет сравнительно четкие границы, отделяющих ее от всего прочего. Физик, оставаясь чистым физиком, не способен изучать соотношения между различными формами собственности. Историку не дано исследовать ход химических реакций. Ботаник не в состоянии применить свои профессиональные навыки для анализа римского права. В то же серьезный математик не останавливается перед любыми преградами и не терпит границ, искусственно разделяющих различные научные дисциплины. Оставаясь по своей сути чистым математиком, он способен смело вторгаться в любую форму человеческой деятельности и добиваться ощутимых успехов. Вот и получается, что Математика каким-то непостижимым способом умудряется изучать практически любые материальные объекты, оперируя при этом исключительно собственными абстрактными понятиями… Имеем ли право после всего этого считать, что к Математике термин "наука" применим в той же степени, что и к физике, социологии или географии? Не логичнее ли предположить, что мы имеем дело с какой-то иной формой мировосприятия?

Возникает естественный вопрос, как же можно объяснить грандиозные успехи абстрактных математических методов при решении конкретных прикладных задач? Почему, безусловно, отсутствующие в окружающем мире числа и функции, уравнения и операторы позволяют осторожно приоткрыть тайны движения планет, взаимодействия химических элементов, передачи генетической информации, механизма ценообразования на свободном рынке? Как, несомненно, абстрактное Ничто превращается во вполне осязаемое конкретное Нечто?

Между Математикой и окружающей нас действительностью непременно должно существовать какое-то связующее звено – специфический тип модели, с одной стороны, способной содержать богатейшую информацию о том или ином реальном предмете исследования, а с другой стороны, сформулированной с помощью абстрактных математических понятий и, стало быть, пригодной для применения мощного математического аппарата. Это и есть ***математическая модель*** исследуемого явления, служащая своего рода переводом закономерностей, выявленных конкретной наукой, на строгий математический язык. Математическое моделирование оказывается грандиозным мостом, объединяющим два принципиально разных мира – окружающую объективную действительность, воспринимаемую нашими органами чувств и изучаемую средствами отдельных наук, и абстрактный мир человеческих идей, где властвуют математические законы[[3]](#endnote-3).

Наша задача как раз и состоит в том, чтобы в какой-то степени оценить особенности математического моделирования различных процессов, познакомиться с принципами их построения и методами их исследования, а значит, научиться возводить мосты между мирами.

***Математические объекты относятся к идеальному миру человеческих идей.***

***Математика способна изучать практически любые объекты материального мира.***

***Математическая модель – мост   
между окружающей действительностью и идеальным миром математики.***

#### **3. Содержание или форма?**

Рассматривая то или иное произведение литературы или искусства, мы оцениваем как его содержание, так и форму. Когда мы говорим о содержании, то нас интересует непосредственно сюжет данного произведения, те конкретные цели, которые преследовал его творец, те мысли, которые он сознательно вложил в свой труд. Форма же скорее характеризует средства, при помощи которых автор воплотил в жизнь свои сокровенные мысли. Если содержание несет, прежде всего, объективную информацию о рассматриваемом предмете или явлении, то форма в значительной степени соответствует личным вкусам автора, а потому оказывается глубоко субъективной.

На первый взгляд, кажется вполне естественным, что цель, идея, мысль предшествуют форме, т.е. средству, что субъективный взгляд исследователя не должен заслонять истинную природу изучаемого явления. Однако почему-то о подлинном искусстве и литературе можно говорить с полным основанием лишь тогда, когда форма произведения, по меньшей мере, адекватна его содержанию, когда применяемые средства оказываются достойными выбранной цели.

Любой нормальный человек способен более или менее внятно рассказать о том или ином конкретном эпизоде своей жизни, охарактеризовать кого-либо из своих близких знакомых, поделиться собственными впечатлениями о каком-нибудь известном событии. Но получим ли мы в результате настоящее произведение искусства? Подобный рассказ при всей его возможной содержательности заинтересует, по-видимому, лишь весьма узкий круг людей, имеющих непосредственное личное отношение к этому вполне заурядному делу. Но вот поэт зачем-то придает своему повествованию неповторимый стихотворный размер, снабжает его неожиданными рифмами, богатыми метафорами, казалось бы, не несущими никакой четкой смысловой нагрузки, ни только не проясняющими, но подчас, и затемняющими непосредственный сюжет произведения... Любой человек может взять в руки фотоаппарат или смартфон и получить вполне адекватное изображение объекта съемки. Однако за редким исключением результат едва ли вызовет особый интерес у широких масс. Но вот за работу берется настоящий художник, и в результате получается картина, продолжающая волновать зрителя и через десятки, если не сотни лет. А вот композитор передает свои впечатления посредством гармонии звуков, не очень понятных с информационной точки зрения... И в результате мы встречаемся с Искусством, которое переживет своего творца и будет волновать многие поколения совершенно разных людей, бесконечно далеких от проблем, волновавших когда-то автора. И у каждого культурного человека эти божественные творения вызывают свои индивидуальные ассоциации...

Так действительно ли при построении модели рассматриваемого явления следует добиваться исключительно высокой точности воспроизведения информации? Разве серьезный писатель, рассказывающий о заинтересовавшем его событии, воспроизводит именно то, что происходило на самом деле? Разве настоящий художник, пишущий картину, заботится главным образом о ее максимальной близости имеющемуся оригиналу? По словам Огюста Родена, "*художник*, *который довольствуется точным изображением действительности и рабски воспроизводит даже самые незначительные детали*, *никогда не станет настоящим мастером*". И в то же время портрет кисти талантливого живописца почему-то говорит о внутреннем мире человека гораздо больше, чем самая четкая фотография. А рассказ талантливого писателя производит несравненно более глубокое впечатление, чем точнейший отчет строгого судебного эксперта высшей квалификации. Эти призрачные туманные формы почему-то неизменно оказываются в конечном итоге удивительно информативными...

А теперь зададимся вопросом о соотношении между содержанием и формой в научном исследовании и, в частности, при математическом моделировании. Коль скоро целью любого моделирования является воспроизведение информации о рассматриваемом объекте, то мы, по-видимому, должны уделять основное внимание содержательности модели, считая ее форму делом второстепенным. А уж от математической модели мы вправе ожидать максимальной объективности и адекватности. Считая допустимым, а подчас, и необходимым, определенное отступление от точности воспроизведения информации в литературе, искусстве, религии, мы, как будто бы должны требовать максимальной точности от Науки, а тем более, от Математики. Ведь именно здесь мы в праве ожидать предельно четких и убедительных ответов на все корректно поставленные вопросы...

Но столь ли уж высока благонадежность Науки? Отметим, прежде всего, что это лишь одна из многих форм познания окружающего мира. Умей она давать полные исчерпывающие ответы на все волнующие нас вопросы, едва ли кому-либо пришло в голову обращаться к религии или искусству. К сожалению (или к счастью?), возможности Науки весьма ограниченны. Действительно, что есть первопричина всего существующего? Что есть жизнь и почему она возникла? Что такое разум и почему мы им наделены? Эти важнейшие проблемы, неизменно стоящие перед человечеством, увы, фактически оказываются за пределами Науки.

Но не будем сейчас задавать вечные вопросы и обратимся к простым будничным явлениям, которые, вне всякого сомнения, можно и должно изучать научными методами, причем желательно с активным привлечением математического аппарата. Рассмотрим заурядный процесс движение некоторого тела в пространстве. Задача физики (точнее, механики) состоит в том, чтобы четко и ясно указать, где находится данное тело в тот или иной конкретный момент времени и как быстро оно движется…

Однако, как это ни печально, в современной физике заурядный вопрос о том, что происходит в действительности в каждом конкретном случае, может быть лишен четкого смысла. Которое из двух событий на самом деле произошло раньше? Где конкретно находится отдельно взятый электрон в данный момент времени и какой он имеет при этом импульс? Согласно специальной теории относительности, первый вопрос порой оказывается не корректным без указания рассматриваемой системы отсчета, а выбор конкретной системы отсчета – личное дело исследователя. Квантовая механика накладывает принципиальный запрет на возможность полного и окончательного ответа на второй вопрос.

А можно ли точно установить траекторию движения конкретной единичной молекулы в потоке жидкости? Да и есть ли в этом острая необходимость? Стоит ли добиваться абсолютного соответствия между результатами натурного эксперимента и предлагаемой нами моделью, если самая надежная аппаратура неизбежно производит измерения с некоторой погрешностью? На результаты производимого опыта могут сказаться (подчас весьма существенно) и высокая солнечная активность, и стоящий невдалеке кондиционер, и проехавший в данный момент по улице большегрузный самосвал, и недостаточно чисто вымытая лабораторная пробирка, и семейные неприятности у экспериментатора. Так следует ли в серьезных научных исследованиях озвучивать каждый случайный шум?

На любой процесс в той или иной степени неизменно оказывают влияние различного рода случайные факторы, которые зачастую не только невозможно, но и вообще не нужно учитывать. Задача исследователя – понять суть изучаемого явления, а не отображать всевозможные помехи. Точно также писатель или художник свободно отходят от оригинала, смело отбрасывают второстепенные, по их мнению, детали и воспроизводят изучаемый объект так, как считают нужным. Так столь ли уж велика разница между строгой Наукой и вольным Искусством?

Что же касается якобы безгрешной Математики с ее гордой претензией на абсолютную достоверность и объективность, то столь ли уж надежен ее фундамент? Действительно ли законы Математики служат эталоном абсолютной точности и достоверности? Казалось бы, естественны и тривиальны свойства коммутативности и ассоциативности умножения, за которыми стоит опыт тысячелетий. Но, переходя от чисел к матрицам, мы почему-то теряем коммутативность, а для обобщенных функций возможно нарушение ассоциативности умножения[[4]](#endnote-4). Казалось бы, аксиоматика евклидовой геометрии абсолютно безупречна и проверена многими поколениями математиков. Но вот мы рискнули заменить одну аксиому другой, и всё величественное здание вопреки ожиданиям вовсе не рухнуло, а приняло иной, совершенно неожиданный, но вполне строгий вид. Предельно конкретный вопрос о том, сколько прямых, параллельных данной, проходит через точку, взятую вне прямой, никак не может иметь четкого однозначного ответа без указания выбранной системы аксиом. При этом каждый исследователь в праве выбрать ту аксиоматику, которая ему больше нравится, лишь бы она оказалась непротиворечивой и давала внятный ответ на конкретно поставленный вопрос... Здесь проглядывается несомненная аналогия с выбором системы отсчета в релятивистской физике. А стоит ли этому удивляться? Математика такова, каков описываемый ею реальный мир. О какой уж объективности здесь может идти речь, если принципиальный результат существенным образом зависит от воли исследователя?

А чего стоят знаменитые парадоксы теории множеств, если едва не каждый уважающий себя математик предлагал в своё время собственный, единственно верный, по его мнению, способ выхода из той глубокой трясины, в которой, как будто бы, крепко завязла всемогущая Математика. А весь математический мир раскололся при этом на множество смертельно враждующих между собой научных школ, как будто речь идет не о добропорядочных служителей самой строгой науки, а об упрямых философах Древней Греции или Китая.

Так верна или нет на самом деле континуум-гипотеза Кантора? Надо ли включать в число первооснов теории множеств аксиому выбора? Является ли неоспоримой абсолютной истиной принцип исключения третьего? Наконец, существует еще легендарная теорема Геделя, которая окончательно ставит крест на попытках создания достаточно содержательной полной непротиворечивой математической теории. Не грех вспомнить здесь и теорему Тарского, согласно которой понятие истинности в той или иной конкретной формализованной теории никак не может быть охарактеризовано средствами самой этой теории... А еще есть любопытная теорема Левенгейма – Сколема, в соответствии с которой, грубо говоря, любая теория, призванная описать некоторый заранее фиксированный круг понятий, непременно будет описывать и объекты, лежащие за пределами указанного круга[[5]](#endnote-5)…

Однако не будем забираться в дремучие беспросветные дебри туманных оснований Математики. В данном случае нас интересует предельно конкретный вопрос – всегда ли адекватность является важнейшим требованием, предъявляемым к математической модели? Действительно ли содержание оказывается решающим фактором в процессе математического моделирования, а форма есть нечто вспомогательное и второстепенное?

***Математика и наука в целом отвечает не на все вопросы.***

***Математика такова, каков описываемый ею реальный мир.***

***При моделировании не стоит озвучивать каждый случайный шум.***

#### **4. Коперник или Птолемей?**

Рассмотрим конкретный пример. Попробуем понять, в чем состоит принципиальное различие между космологическими теориями Коперника и Птолемея? Почему в этом долгом напряженном споре взял верх именно Коперник?

Казалось бы, ну что тут, собственно, долго думать... Сразу напрашивается естественный ответ – умница Коперник верно описал строение Солнечной системы, а бедняга Птолемей серьезно заблуждался. И вот после некоторых временных недоразумений, в конце концов, восторжествовала справедливость...

К сожалению, мы не сможем удовлетвориться столь очевидным, на первый взгляд, ответом. Действительно, обе рассматриваемые теории не могут претендовать на абсолютную истину и на самом деле являются всего лишь моделями Солнечной системы. А модель – это не сама объективная реальность, а лишь некоторое представление конкретного исследователя об изучаемом объекте. Таким образом, система Коперника не может быть признана абсолютно верной. Она всего лишь более или менее адекватно описывает движение планет вокруг Солнца. Имеем ли мы право приписывать ей абсолютную непогрешимость? Вспомним хотя бы о том, что, по мнению Коперника, Солнце есть центр мироздания, а планеты движутся вокруг него по круговым орбитам, что как будто не очень соответствует действительности...

С другой стороны, столь ли уж плох был этот Птолемей с его "нехорошей" геоцентрической системой? Отдаем ли мы себе отчет в том, что Клавдий Птолемей по праву относится к числу крупнейших математиков, астрономов и географов древности? Он был одним из создателей тригонометрии. За полторы тысячи лет до Ферма, Декарта и Эйлера он рассуждал о трех измерениях пространства. Одним из первых усомнился в очевидности пятого постулата Евклида. Был изобретателем астролябии. И, пожалуй, его место в истории мировой культуры никак не менее почетно, чем место Николая Коперника. Отметим также, что среди предшественников Птолемея в разработке геоцентрической системы были столь блистательные мыслители, как Евдокс и Гиппарх. И если бы система Птолемея была так уж безнадежна, то неужели же ею пользовались бы лучшие астрономы всего мира на протяжении полутора тысяч лет?

Попытаемся уточнить наш ответ. По-видимому, обе рассматриваемые теории в некоторой степени описывают исследуемый круг явлений. Долгое время астрономы довольствовались приемлемой, но относительно грубой моделью Птолемея, пока на смену ей не пришла более совершенная теория. Система Коперника, конечно же, оказалась существенно более точной, чем и объясняются ее неоспоримые успехи...

Однако и этот, казалось бы, совершенно безупречный ответ, к сожалению, не в полной степени соответствует действительности. На самом же деле теория Птолемея практически не уступает системе Коперника в точности описания движения планет или затмения Солнца и Луны. К моменту появления гелиоцентрической системы астрономия фактически не знала явлений, которые бы описывались ею с большей степенью точности, чем геоцентрическая система Птолемея. И, несмотря на это, полная и безоговорочная победа Коперника оказалась неизбежна. Почему?

Как мы уже отмечали, моделирование неизменно сводится к сбору, хранению и переработке информации. Следовательно, из двух моделей одного и того же объекта предпочтительнее окажется та, которая осуществляет преобразование информации наиболее просто и эффективно[[6]](#endnote-6). Для описания конкретного объекта мы без особых хлопот можем предложить какую-нибудь абстрактную математическую формулу. А затем с помощью многочисленных изощренных поправок добиться достаточно высокой точности предсказания изучаемого единичного явления. Но получаем ли мы право признать установленную в результате подобных сомнительных ухищрений математическую модель вполне удовлетворительной?

Да, модель Птолемея сравнительно прилично описывает движение планет Солнечной системы. Но достигается столь высокая точность исключительно за счет применения чрезвычайно громоздких искусственных конструкций типа эпициклов. Система же Коперника (особенно после ее усовершенствования Кеплером), добиваясь такой же степени точности, оказывается существенно более простой, удобной и красивой. Любопытно, что приговор системе Птолемея фактически вынес сам ее автор, которому принадлежит глубочайшая мысль о том, что астрономия должна стремиться к возможно более простой математической модели. Только ли астрономия?

Итак, космологические теории Коперника и Птолемея, по крайней мере, на определенном этапе развития науки, практически не уступали друг другу в смысле точности описания изучаемых явлений, т.е. оказывались более или менее равноценными в смысле заключенного в них содержания. Неминуемая победа Коперника была обусловлена именно выбором более совершенной формы. Его модель отличается значительно большей изящностью и с эстетической точки зрения оказывается намного предпочтительнее. Геоцентрическая система на ранней стадии своего развития также была достаточно простой и красивой (в центре Вселенной расположена Земля, вокруг которой по круговым орбитам вращаются Солнце, Луна и планеты), но, к сожалению, оказалась не столь уж точной. По мере ее уточнения за счет введения дополнительных искусственных конструкций модель постепенно утратила свою эстетическую привлекательность. Поэтому, стоило появиться не менее точной, но более изящной и эффективной системы Коперника, как стало ясно, что будущее – за последней.

В результате мы вновь возвращаемся к рассуждениям о соотношении между формой и содержанием в научных исследованиях. Да, содержание научной теории, информативность математической модели является чрезвычайно важным фактором. Но подлинное произведение Науки мы получим лишь в том непременном случае, когда ее содержание выражено посредством достаточно совершенной формы. Со времен Пифагора гармония в науке считается не менее важным требованием, чем в живописи и поэзии, музыке и религии. Мир устроен так, что более совершенная с эстетической точки зрения математическая модель почему-то всякий раз оказывается и более эффективной[[7]](#endnote-7). И уж если хорошенько вдуматься, то можно прийти к любопытной мысли о том, что задача Математики состоит как раз в изучении форм, а уж наделение этой формы конкретным содержанием остается в ведении специальных наук. Собственно, о чем-то подобном высказывался в свое время еще Платон... А уж он-то хорошо знал, что говорил…

***Нельзя пренебрегать формой математической модели.***

***Более совершенная с эстетической точки зрения математическая модель   
оказывается более эффективной.***

#### **5. Математическая модель падения тела**

После затянувшихся общих рассуждений обратимся к чему-то существенно более конкретному... Возможно, одна из первых в историческом смысле математических моделей, в полной степени отвечающая современным научным требованиям, характеризует процесс падения тел под действием собственного веса и связана с именем Галилея[[8]](#endnote-8). Хорошо известно, что тело, поднятое над землей и предоставленное само себе, почему-то непременно упадет на землю. Попытаемся описать этот процесс математически[[9]](#endnote-9).

Прежде всего, зададимся естественным вопросом, что же конкретно происходит в процессе падения данного тела? Если хорошенько подумать (а лучше – поэкспериментировать), то можно сообразить (а еще лучше – увидеть), что при падении тела со ***временем*** будет изменяться его ***высота*** над землей. Таким образом, исследуемый процесс можно попытаться описать с помощью ***функции*** *у=у*(*t*), характеризующей высоту тела в произвольный момент времени *t*. Вот если мы действительно сможем определить эту функциональную зависимость и предугадать тем самым с достаточной степенью точности закон изменения со временем положения тела в пространстве, то у нас будут серьезные основания считать решенной стоящую перед нами важную практическую задачу.

Итак, движение тела непременно сопровождается изменением его высоты. Естественно задаться вопросом, насколько быстро будет меняться рассматриваемая величина. Таким образом, для нахождения искомой функции *у* можно попытаться оценить скорость ее изменения. С математической точки зрения скорость изменения функции *у* в точке *t* представляет собой ее ***производную *** в этой точке. В механике эту величину принято называть ***скоростью*** и обозначать через *v*.

Если скорость движения тела *v* нам известна, то для нахождения функции *у = у*(*t*) мы получаем чрезвычайно простое соотношение

. (1.1)

Математики называют задачу (1.1) ***дифференциальным уравнением***[[10]](#endnote-10). Таким образом, как будто, завершен первый этап нашего исследования. Полученное уравнение (1.1), как нам кажется, должно бы описывать исследуемый процесс, будучи его математической моделью.

Дальнейший этап исследования предполагает извлечение математическими средствами информации, содержащейся в полученной модели в скрытой форме. Нам известна связь между искомой функции *у* и известной величиной *v*, выраженная посредством равенства (1.1). Для нахождения искомой функциональной зависимости нам предстоит решить полученное уравнение, т.е. преобразовать информацию, содержащуюся в математической модели. Если скорость тела со временем не меняется, то равенству (1.1) будет удовлетворять любая функция вида

*у*(*t*) *= vt + с*, (1.2)

где *с* – произвольная постоянная[[11]](#endnote-11).

На следующем этапе исследования нам предстоит решить задачу ***идентификации модели***. В частности, мы попытаемся интерпретировать полученный результат с позиций данной предметной области. Нам предстоит выяснить, действительно ли построенная нами модель в должной степени описывает рассматриваемое явление. Для этого следует сравнить результаты анализа математической модели с экспериментом.

Неоднозначность найденного решения сразу же наводит на мысль о том, что имеющейся в нашем распоряжении информации о процессе пока еще не достаточно для его полного описания. Следовательно, предложенная нами математическая модель нуждается в серьезном уточнении. Это означает, что нам предстоит вернуться к первому этапу и попытаться восполнить имеющийся пробел в понимании изучаемого процесса.

Очевидно, положение тела, движущегося с заданной скоростью, будет существенно зависеть от того, где конкретно находилось тело в некоторый начальный момент времени *t*0. Другими словами, два тела, движущиеся с одной и той же скоростью, но находящиеся изначально в разных точках, будут и впоследствии различаться своим положением. Тем самым математическая модель движущегося тела должна предусмотреть зависимость закона движения не только от скорости, но и от начального положения тела. Предположим, что при *t = t*0 тело имеет начальную высоту *у*0, т.е. справедливо равенство

*у*(*t*0) *= у*0, (1.3)

называемое ***начальным условием***. Уточненная математическая модель характеризуется соотношениями[[12]](#endnote-12) (1.1), (1.3).

Теперь уже у нас появилась возможность определить решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет начальному условию[[13]](#endnote-13) (1.3). Для этого полагаем в формуле (1.2) *t=t*0. В результате получаем значение *у*(*t*0)*=vt*0*+с=у*0. Отсюда находим константу *с=у*0–*vt*0. Тогда решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.3) имеет вид

*у*(*t*) *= у*0 *+ v*(*t* – *t*0). (1.4)

Тем самым мы действительно можем определить положение рассматриваемого тела в произвольный момент времени. И мы вновь обращаемся к интерпретации полученных результатов и… сталкиваемся с явным несоответствием расчетной высоты падающего тела с ее величиной, наблюдаемой экспериментально. Сей прискорбный факт свидетельствует об имеющейся серьезной неточности в сделанных нами предположениях. Действительно, простейший эксперимент показывает, что вопреки принятой нами гипотезе, в процессе падения скорость тела существенно меняется. Уточняя модель, приходим к той же задаче, но уже с переменной величиной *v*.

Интегрируя соотношение (1.1) от *t*0 до некоторого значения *t* и учитывая начальное условие (1.3), находим следующий закон изменения высоты тела над землей

. (1.5)

В случае постоянства скорости эта формула принимает уже известный вид (1.4).

Теперь нам вновь следовало бы сравнить найденную функциональную зависимость с результатами наблюдений. Однако, к сожалению, такой возможности у нас в действительности нет, поскольку закон изменения скорости тела нам вообще-то не известен. Тем самым выясняется, что исследуемый процесс характеризуется не только координатой, но и скоростью падающего тела. Мы вновь убеждаемся в необходимости включения в математическую модель некоторой дополнительной информации.

Попытаемся оценить, как быстро меняется скорость падающего тела. Скорость изменения функции *v*, т.е. ее производная , являющаяся тем самым второй производной  от координаты, в механике называется ***ускорением*** и обозначается через *а*. В результате для нахождения скорости мы получаем еще одно дифференциальное уравнение

. (1.6)

Это соотношение с математической точки зрения аналогично уравнению (1.1) и также требует задания начального условия. Мы можем предположить для простоты, что в момент времени *t = t*0 тело только начинает движение, а значит, имеет нулевую скорость (мы подняли тело над землей и его отпустили). Таким образом, справедливо равенство

*v*(*t*0) *=* 0. (1.7)

На очередной стадии процесса моделирования получается ***система дифференциальных уравнений*** (1.1), (1.6) с начальными условиями (1.3) и (1.7).

Задача (1.6), (1.7) допускает единственное решение, аналогичное функциям *у*, определяемым по формулам (1.4) или (1.5) в зависимости от того, будет ли ускорение *а* постоянным или переменным. Так или иначе, мы можем установить закон изменения скорости падающего тела при непременном условии, что его ускорение уже известно. Это обстоятельство наводит на определенные мысли...

Нахождение высоты тела сводится к определению его производной, т.е. скорости. Для вычисления скорости требуется найти уже ее производную, т.е. ускорение. Было бы уж очень печально, если бы оказалось, что теперь нам еще придется искать производную от ускорения, далее – производную от этой производной и т.д. К счастью, весьма надежный эксперимент показывает, что ускорение падающего тела по какой-то не совсем понятной причине с достаточно большой степенью точности со временем не меняется и даже не зависит от специфических особенностей рассматриваемого тела, являясь универсальной физической постоянной[[14]](#endnote-14). Этот поразительный факт позволяет нам, в конце концов, завершить проводимое исследование и добиться долгожданного результата.

Отметим, что в процессе движения высота падающего тела уменьшается, что в соответствии с соотношением (1.1) возможно исключительно в случае отрицательности скорости *v*. Некая функция *v*, равная нулю в начальный момент времени и изменяющаяся с постоянной скоростью *а*, может стать отрицательной исключительно при выполнении неравенства *а<*0. Положительная величина *g=-a* называется ***ускорением свободного падения*** и является абсолютной константой, не зависящей (если не вдаваться в особые тонкости) от условий протекания процесса. Таким образом, соотношение (1.6) может быть записано следующим образом

 (1.8)

Итак, мы имеем математическую модель процесса падения тела[[15]](#endnote-15). Она характеризуется соотношениями (1.1), (1.3), (1.7), (1.8). Однако требуется еще установить ***условия применимости*** этой модели. Полученные уравнения движения тела как будто остаются в силе в любой момент времени. Однако в действительности приведенная модель описывает исследуемый процесс лишь на интервале времени от начала отсчета до некоторого момента времени *Т*, в который тело достигнет поверхности земли. Если не внести соответствующее ограничение в постановку задачи, то окажется, что согласно имеющимся уравнениям наше тело благополучно провалится сквозь землю, а не хотелось бы... Таким образом, уравнения (1.1), (1.8) имеют смысл исключительно на ограниченном интервале времени 0<*t*<*Т*, где момент времени *Т* характеризуется равенством

*у*(*Т*) *=* 0. (1.9)

Наконец, параметр *у*0, входящий в начальное условие (1.3) и характеризующий высоту тела над поверхностью земли в начальный момент времени, должен быть непременно положительным, т.е. удовлетворять условию

*у*0 > 0. (1.10)

Итак, ***математическая модель процесса свободного падения тела*** математическая включает в себя уравнения состояния (1.1), (1.8) на интервале времени 0*<t<Т* с начальными условиями (1.3), (1.7), соотношением (1.9) для нахождения конечного момента времени *Т* и условием (1.10), которому должен удовлетворять параметр системы *у*0. Рассмотренные этапы построения математической модели отражены в Таблице 1.2.

Таблица 1.2. Этапы уточнения модели.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **этап** | **гипотеза** | **реализация** | **проверка** | **вывод** |
| 1 | движение тела определяется его скоростью | уравнение (1.1) | модель не позволяет  однозначно  определить решение | необходимо учитывать дополнительную информацию |
| 2 | движение определяется скоростью и  начальным положением | задача (1.1), (1.3) | скорость не постоянна | необходимо  считать скорость переменной |
| 3 | движение определяется переменной скоростью и  начальным положением | задача (1.1), (1.3) с переменной скоростью | скорость не известна | необходимо  задать закон изменения скорости |
| 4 | движение определяется ускорением и  начальными значениями положения и скорости | задача  (1.1), (1.6),  (1.3), (1.7) | ускорение не известно | необходимо  задать ускорение |
| 5 | движение определяется ускорением свободного падения и начальными состояниями системы | задача  (1.1), (1.8),  (1.3), (1.7) | модель применима  не всегда | необходимо  задать условия применимости  модели |
| 6 | движение определяется ускорением свободного падения и начальными состояниями системы при определенных ограничениях | задача  (1.1), (1.8),  (1.3), (1.7)  с условиями  (1.9), (1.10) | результаты моделирования в целом  соответствуют эксперименту | модель применима на данном этапе  исследования |

Полученная математическая модель содержит в скрытой форме достаточно полную информацию о движении рассматриваемого объекта. Для нахождения непосредственного закона движения требуется найти решение полученной системы. Без ограничения на общность здесь можно положить *t*0 = 0, поскольку за начальный момент времени мы вправе выбрать любое значение. Тогда, решая уравнение (1.8) с начальным условием (1.7), определяем, что скорость падающего тела будет изменяться по следующему закону:

*v*(*t*) *= -gt*. (1.11)

Подставляя это значение в формулу (1.5) при *t*0 = 0, установим следующую зависимость высоты падающего тела от времени при различных значениях начальной высоты

**. (1.12)

Для нахождения времени движения тела, ограничивающего применимость нашей модели, воспользуемся условием (1.9). Полагая в равенстве (1.12) *t=Т* и приравнивая полученный результат нулю, будем иметь *у*0 = *gT*2/2. Отсюда можно определить значение времени падения тела в зависимости от его начальной высоты

 . (1.13)

Таким образом, формулы (1.11), (1.12) характеризуют исследуемый процесс исключительно вплоть до момента времени *Т*, определяемого по формуле (1.13). Еще одной характеристикой процесса, имеющей практическое значение, является скорость тела в момент падения. При заданной начальной высоте тела она равна



Полученные результаты иллюстрируются Рис. 1.2.



Рис. 1.2. Характеристика падения тела.

Следует отметить, что полученные результаты соответствуют лишь какому-то определенному уровню исследования рассматриваемого процесса и при необходимости могут быть уточнены. Так, в процессе моделирования мы совершенно игнорировали влияние силы сопротивления воздуха, а в равной степени – и возможное действие других сил, из-за которых, помимо всего прочего, движение тела может уже не оказаться прямолинейным. Нас не интересовали форма, размеры и масса тела, которые к тому же при определенных условиях сами могут меняться. Да и неизменность ускорения свободного падения следует признать истинной лишь при относительно небольшом перепаде высот.

Последние рассуждения нисколько не перечеркивают проведенный выше анализ, а свидетельствуют лишь о том, что любая модель является лишь каким-то (чаще всего – небольшим) шагом на долгом пути постижения Истины. Возможно, исходя из специфики решаемой задачи, к нашему великому удовлетворению полученная степень точности окажется вполне удовлетворительным. Однако не исключено, что будут вновь обнаружены определенные расхождения результатов моделирования с экспериментальными данными. И тогда нам еще предстоит отыскивать какие-либо ошибки в принятых гипотезах или не учтенные ранее факторы и строить более точную модель. Некоторое продвижение в этом направлении делается в Приложении.

***Процесс падения тела под действием собственного веса   
на определенном интервале времени с некоторой степенью точности описывается уравнениями движения с начальными условиями.***

#### **6. Принципы построения математической модели**

На основании проведенных выше рассуждений можно попытаться выявить некоторые общие закономерности в построении математических моделей. Прежде всего, следует понять, что же является непосредственным ***объектом*** нашего исследования. В качестве такового в рассмотренном выше примере выступает падающее тело. При этом форма, размеры тела и его внутренняя структура нас совершенно не волнуют, т.е. мы воспринимаем его как ***материальную точку***.

Затем следует установить ***функции состояния системы***, т.е. величины, которые, по мнению исследователя, наиболее полно отражают ход рассматриваемого процесса. Так, в приведенном выше примере нас интересовали исключительно высота тела над землей и скорость его движения. При решении задач теплофизики нам хотелось бы узнать температуру тела[[16]](#endnote-16). В задачах химической кинетики особо важны концентрации реагирующих веществ и продуктов реакции[[17]](#endnote-17). Для экономической модели конкретного производства определяющую роль играют его доходы и объем выпускаемой продукции[[18]](#endnote-18)... Математические модели, как правило, представляют собой задачи нахождения выбранных функций состояния.

Исследуя полученную математическую модель, решая соответствующие уравнения, мы стремимся установить характер зависимости функций состояния от тех или иных параметров. Прежде всего, это ***независимые переменные***, в качестве которых обычно выступают время и пространственные переменные. В приведенном примере нас интересовало не просто положение тела, а его высота в тот или иной момент времени. При исследовании процесса теплопереноса следует установить не температуру тела вообще, а его температуру в конкретной точке.

Уяснив, что является функциями состояния и независимыми переменными, мы должны указать также ***систему координат***, в рамках которой осуществляется формулировка математической модели. В частности, в задаче о падении тела за начало координат (точка на плоскости *t*, *y*) были выбраны момент начала движения и поверхность земли. При этом ось времени направлена в будущее, а высота – от поверхности земли вверх. При описании скорости за начало отсчета мы выбираем нулевую скорость, соответствующую состоянию покоя, а за положительное направление скорости – то, что соответствует возрастанию высоты тела над землей.

Теперь можно попытаться перейти непосредственно к выводу математических соотношений, характеризующих закон изменения функций состояния системы. Для этого необходимо выяснить, что конкретно повлияло на ход развития событий, т.е. указать ***причину эволюции системы***. В рассмотренном примере причиной падения тела были нахождение тела изначально на некоторой высоте и действующая на него сила тяготения. Другие возможные эффекты, в частности, сопротивление воздуха, в данной модели не учитывались.

Указав причины, повлекшие за собой интересующие нас события, мы должны выявить ***причинно-следственную связь***, т.е. установить, как конкретно повлияла каждая из этих причин на течение моделируемого процесса. Именно эта связь, выражающая закон изменения функций состояния системы под влиянием указанных причин, и является основой математической модели. Она формулируется на основе глубинных закономерностей, установленных той или иной частной наукой. Применительно к рассмотренному примеру подобная связь фактически выражается вторым законом Ньютона, согласно которому вторая производная от координаты пропорциональна действующей силе тяготения, а также соответствующими начальными условиями.

Записав математические соотношения, выражающие причинно-следственную связь для изучаемого явления, мы обнаружим, что помимо функций состояния и независимых переменных математическая модель включает в себя характеристики совершенно иной природы. Речь идет о ***параметрах системы***, позволяющих среди всего необъятного класса явлений данной природы, описываемых установленным ранее соотношением, выбрать именно тот конкретный случай, который и представляет непосредственный интерес для нас на данном этапе исследования. Так, закон падения тела является общим для бесконечного класса изучаемых объектов. Однако для нахождения положения конкретного тела в пространстве следует еще указать конкретные значения его начальной высоты и начальной скорости, оказывающиеся параметрами процесса. В нашем случае мы предположили, что тело изначально покоилось, а значит, ограничились единственным параметром системы – высотой тела в начальный момент времени. При описании процесса переноса тепла мы непременно должны учитывать теплофизические свойства рассматриваемого тела.

Формально параметры системы могут меняться произвольным образом. Однако далеко не все варианты задания этих величин имеют физический смысл. Следует указать условия применимости математической модели, т.е. диапазон изменения параметров (как независимых переменных, так и параметров системы), при которых установленная модель имеет смысл. В частности, уравнение движения падающего тела остаются в силе лишь вплоть до момента приземления, а начальная высота тела должна быть положительна.

Итак, в состав математической модели обычно входят три класса характеристик. Параметры процесса в каждом конкретном случае считаются фиксированными величинами и составляют ***входную информацию***[[19]](#endnote-19). Независимые переменные не фиксированы и меняются в некоторых пределах, образуя тем самым область определения функций состояния. Таким образом, математическая модель чаще всего представляет собой задачу восстановления зависимости функций состояния от соответствующих переменных при произвольном допустимом наборе параметров процесса.

После вывода необходимых математических соотношений нам предстоит выяснить, какие сведения о процессе представляют для нас практический интерес помимо функций состояния системы, т.е. следует указать ***выходную информацию***. В качестве таковой в задаче о падении тела являются момент падения тела на поверхность земли и скорость тела в этот момент времени.

Подводя итоги, заключаем, что построение математической модели исследуемого процесса включает в себя следующие элементы:

1. Объект исследования.
2. Функции состояния системы.
3. Независимые переменные.
4. Система координат.
5. Причины эволюции системы.
6. Причинно-следственная связь.
7. Входные параметры системы.
8. Условия применимости математической модели.
9. Выходные параметры системы.

Характеристика основных элементов построения математической модели процесса падения тела приводится в Таблице 1.3.

Таблица 1.3. Основные элементы математической модели процесса падения тела.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | **элементы** | **характеристика для процесса падания тела** |
| 1 | объект исследования | падающее тело |
| 2 | функции состояния | высота (координата) тела, его скорость |
| 3 | независимая переменная | время |
| 4 | система координат | начальный момент времени – нулевой,  координата направлена вертикально вверх,  начало координаты – поверхность земли,  нулевая скорость соответствует состоянию покоя,  скорость возрастает в направлении возрастания координаты |
| 5 | причина эволюции | гравитационное поле и начальное нахождение тела над поверхностью земли |
| 6 | причинно-следственная  связь | вторая производная от координаты  пропорциональна силе тяготения |
| 7 | входные параметры | начальная высота тела |
| 8 | условия  применимости модели | движение – до момента приземления,  начальная высота тела положительна |
| 9 | выходные параметры | время движения тело до приземления,  скорость в момент приземления |

Все указанные вопросы в значительной степени решаются средствами той или иной частной науки (физики, химии, биологии и т.п.), к которой, по нашему мнению, относится изучаемое явление. И лишь ответив на них, мы сможем забыть на некоторое время частные науки и обратиться к чистой математике. Теперь в нашем распоряжении имеются конкретные математические соотношения, которые предстоит исследовать на основе тех или иных качественных и количественных методов. Проведя соответствующий анализ исключительно математическими средствами (как правило, с применением компьютера), мы вновь возвращаемся к рассматриваемому явлению с целью физической интерпретации полученных результатов, уточнения стоящих перед нами задач и подведению соответствующих итогов.

***Математическая модель представляет собой задачу определения зависимости функций состояния системы от соответствующих переменных и параметров системы, отражающую при определенных условиях соответствующую причинно-следственной связь.***

#### **7. Классификация математических моделей**

В зависимости от особенностей величин, входящих в состав математических моделей, и связывающих их математический соотношений, можно указать некоторые принципы их классификации. Имеются несколько различных способов классификации математических моделей[[20]](#endnote-20).

Первый из них определяется природой независимых переменных. В частности, рассматриваются ***непрерывные системы***, в которых независимые переменные меняются непрерывным образом, и ***дискретные системы*** с независимыми переменными, изменяющимися с некоторым шагом (постоянным или нет) или вообще представляющими собой конечный набор некоторых значений. В первом случае состояние системы характеризуется обычными функциями одной или нескольких переменных, а во втором – векторами. Непрерывные модели часто описываются ***дифференциальными*** или ***интегральными уравнениями***[[21]](#endnote-21), а для их исследования применяется ***математический анализ***[[22]](#endnote-22) и его приложения. Для описания дискретных моделей применяют методы ***дискретной математики***[[23]](#endnote-23), в частности, ***теорию графов***[[24]](#endnote-24), ***комбинаторику***[[25]](#endnote-25),***булеву алгебру***[[26]](#endnote-26) и др. Непрерывные системы характеризуют многие физические задачи, например, процессы колебания маятника[[27]](#endnote-27) или переноса тепла. К числу дискретных систем, широко встречающихся в экономике, относится, например, ***задача коммивояжёра***[[28]](#endnote-28).

Следующий принцип классификации обусловлен свойствами параметров, влияющих на систему. Здесь различают ***стохастические модели***, в которых допускается влияние на процесс каких-либо случайных факторов, и ***детерминированные модели***, где подобные эффекты не учитываются, а состояние системы определяется однозначно. Для анализа стохастических моделей широко применяются методы ***теории вероятностей***[[29]](#endnote-29). В частности, электрические колебания характеризуются детерминированной моделью, а движение молекулы в потоке жидкости – стохастической моделью.

В дальнейшем мы будем различать ***системы с сосредоточенными параметрами***, в которых функция состояния зависит только от времени, и ***системы с распределенными параметрами***, где допускается также зависимость функции состояния от пространственных переменных. Системы с сосредоточенными параметрами ***конечномерны*** в том смысле, что их состояние в конкретный момент времени описывается конечным набором чисел. Системы с распределенными параметрами ***бесконечномерны***, поскольку для описания их состояния требуется бесконечное множество числовых характеристик[[30]](#endnote-30). В частности, полет снаряда при определенных условиях сравнительно хорошо описываются системой с сосредоточенными параметрами, а диффузия газа в некотором объеме – системой с распределенными параметрами. В качестве систем с сосредоточенными параметрами чаще всего выступают ***обыкновенные дифференциальные уравнения***. Системы с распределенными параметрами обычно характеризуются ***дифференциальными уравнениями с частными производными***[[31]](#endnote-31).

Отметим также ***динамические системы*** с функциями состояниями, меняющимися со временем, и ***стационарные системы***, характеристики которых со временем не меняются. Так, химические реакции и эволюция биологической популяции описываются динамическими системами, а электростатическое и гравитационное поля – стационарными системами.

Различают также ***линейные системы***, в которых отклик на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие, и ***нелинейные системы***, для которых это свойство нарушается. Например, колебание струны и диффузия газа описываются линейными системами, а движение несжимаемой вязкой жидкости и сосуществование двух конкурирующих биологических видов – нелинейными системами[[32]](#endnote-32).

В качестве математических моделей часто выступают различные уравнения. Однако в ряде случаев система может быть описана с помощью ***вариационных неравенств***[[33]](#endnote-33) или некоторой задачи на экстремум. Так, движение материальной точки в классической механике можно описать не только с помощью уравнений движения, но и на основе ***принципа наименьшего действия***[[34]](#endnote-34), согласно которому эволюция системы осуществляется таким образом, чтобы затраты энергии при этом оказались минимальными. Задачи такого типа исследуются с помощью ***вариационного исчисления***[[35]](#endnote-35).

В технике и экономике часто встречаются системы, в которых имеется определенная свобода выбора некоторых параметров. При этом возникает задача выбора таких параметров, которые соответствуют достижению некоторой цели, например, наименьшим затратам на производство некоторой продукции или максимизации объема производства. Подобные задачи решаются с помощью ***теории оптимального управления***[[36]](#endnote-36). В экономике и политике часто возникают игровые задачи, в которых имеются две или более сторон, каждая из которых преследует собственные цели. Для их решения применяются методы ***теории игр***[[37]](#endnote-37).

Математические модели могут описываться ***корректными системами***, которые допускают единственное решение, непрерывно зависящее от параметров системами. Однако возможны и ***некорректные системы***[[38]](#endnote-38), в которых указанные свойства нарушаются. В частности, если по известной температуре в данный момент времени требуется определить распределение температур в некотором теле в последующие моменты времени, то соответствующая задача оказывается корректной. Однако, если при тех же условиях мы попытаемся восстановить предысторию системы, то получается некорректная задача.

Различают также ***прямые задачи***, в которых по известным значениям всех параметров системы требуется установить функции состояния системы, а также ***обратные задачи***[[39]](#endnote-39), для которых какие-то параметры системы не известны и подлежат нахождению по некоторой информации о функциях состояния. Последний класс задач связан с проблемой ***идентификации системы***[[40]](#endnote-40).

В Таблице 1.4 описаны важнейшие классы математических моделей, рассматриваемых в данной книге.

Имеются и некоторые другие способы классификации математических моделей. Кроме того, указанные различные принципы классификации могут рассматриваться в сочетании. В частности, процесс переноса тепла характеризуется корректной непрерывной линейной нестационарной детерминированной системой с распределенными параметрами. Рассмотренная выше математическая модель падения тела описывается корректной детерминированной линейной непрерывной динамической системой.

Таблица 1.4. Классы математических моделей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **класс** | **место** | **пример** |
| непрерывные системы | части I и II | механические колебания |
| дискретные системы | лекция 16 | задача коммивояжёра |
| детерминированные системы | части I и II | модель "биологическая конкуренция" |
| стохастические системы | лекция 17 | модель броуновского движения. |
| системы с сосредоточенными параметрами | часть I | модели химической кинетики |
| системы с распределенными параметрами | часть II | уравнение диффузии |
| динамические системы | части I и II | модель "хищник - жертва" |
| стационарные системы | лекция 12 | гравитационное поле |
| линейные системы | части I и II | уравнение колебания струны |
| нелинейные системы | лекции 6-9,14 | уравнения навье–стокса |
| вариационные принципы | лекция 15 | преломление света |
| вариационные неравенства | лекция 15 | задача синьорини |
| задачи оптимального управления | лекция 21 | максимизация дальности полета ракеты |
| игровые задачи | лекция 16 | антогонистические игры |
| корректные задачи | части I и II | задачи электродинамики |
| некорректные задачи | лекция 20 | задача эйлера об упругом стержне |
| прямые задачи | части I и II | модель антибиотикорезистентности |
| обратные задачи | лекция 22 | обратные задачи теплопроводности |

***Математические модели различаются особенностями   
входящих в них величин и связывающих их соотношений.***

**Направление дальнейшей работы**. Рассмотренная математическая модель падения тела характеризовалось линейным уравнением. Однако в Приложении рассматриваются более сложные уравнения, явное определение решения которых затруднительно. В этой связи последующая лекция посвящена приближенным методам решения таких задач. Эти вопросы открывают вторую часть курса, посвященную исследованию динамических систем с сосредоточенными параметрами. После этого мы приступим к анализу математических моделей конкретных процессов, относящихся к разным предметным областям.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

Рассмотрим некоторые явления, относящиеся к классической механике и связанные с движением тела в поле силы тяготения[[41]](#endnote-41). Как и в рассмотренном ранее примере предполагается, что в процессе движения форма и внутренняя структура тела не меняются, так что все его точки описывают одинаковые траектории. Таким образом, интересующие нас объекты исследования по-прежнему являются ***материальными точками***. Несомненным шагом вперед по сравнению с рассмотренной ранее задачей о падении тела под действием собственного веса здесь будет учет воздействия на тело не только тяготения, но и некоторых других сил. Для описания процесса движения мы вновь воспользуемся вторым законом Ньютона, согласно которому скорость изменения импульса тела равна сумме действующих на него сил.

Ниже рассматриваются задачи о движении зонда, ракеты и планера, каждая из которых обладает своей спецификой. Так, если для ракеты (как и для падающего тела) мы пренебрегаем влиянием силы сопротивления воздуха, то для зонда и планера это воздействие будет учитываться, причем для легкого планера допускается линейный характер зависимости сопротивления от скорости, а для массивного зонда эта зависимость предполагается квадратичной. Подобно падающему телу, зонд движется прямолинейно, в то время как ракета и планер летят в вертикальной плоскости и характеризуются двумя пространственными координатами. В отличие от других рассматриваемых объектов у зонда в процессе движения меняется масса. Ракета и зонд осуществляют свой полет под действием силы тяги, тогда как на планер оказывает влияние также подъемная сила. Исследование этих задач будет продолжено в Лекции № 2 после изложения приближенных методов решения дифференциальных уравнений.

#### **1. Движение зонда**

Рассмотрим движение зонда, запускаемого в вертикальном направлении[[42]](#endnote-42). Функция состояния *у=у*(*t*) будет характеризовать высоту данного объекта над землей в соответствующий момент времени. Будем считать, что система координат выбрана так же, как и в задаче падения тела. Действующая на тело сила *F* складывается из силы тяги *R*, обусловленной сгоранием топлива, силы сопротивления воздуха *Q* и веса *P*. При этом сила тяги неизменно направлена вверх, т.е. в сторону движения, вес – в противоположном направлении, а сила сопротивления – против направления движения. Таким образом, получаем равенство *F = R* – *Q – P*.

Согласно ***второму закону Ньютона***, скорость изменение импульса тела, т.е. его производная равна действующей на это тело силе[[43]](#endnote-43). Учитывая, что ***импульс*** тела равен произведению его массы на скорость, приходим к уравнению движения



Сила тяги возникает за счет сгорания топлива. Будем полагать, что скорость сгорания (и, тем самым, реактивная сила) постоянна на всем интервале времени, пока имеется запас топлива. Тогда величина *R* будет постоянной и равной *R*0 вплоть до момента времени *t\**, когда топливо полностью сгорит, где *R*0 есть постоянная силы тяги (параметр задачи). Таким образом, сила тяги *R*(*t*) равна *R*0 при *t*<*t\** и нулю в противном случае. Cила сопротивления воздуха существенным образом зависит от скорости движения тела. В частности, с ростом скорости происходит быстрое увеличение силы сопротивления. При определенных условиях зависимость силы сопротивления от скорости можно считать квадратичной. Следует иметь в виду, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения. В результате приходим к равенству  где *μ* – коэффициент сопротивления воздуха, зависящий существенным образом от формы тела. При подъеме зонда скорость *v* положительна, а значит, *Q***>**0. При спуске зонда имеем *v***<**0, а следовательно, *Q***<**0 . В обоих случаях сила сопротивления тормозит движение. Вес тела равен *P=mg*. Подставляя соответствующие значения сил в уравнение движения, будем иметь



В процессе сгорания топлива масса убывает. Следовательно, скорость изменения массы должна быть отрицательной:

****

Функцию *β* полагаем равное некоторому значению *β*0 при *t*<*t\** и нулю в противном случае. Таким образом, до тех пор, пока имеется запас топлива, масса зонда убывает с постоянной скоростью. Как только все топливо сгорело, масса перестает изменяться.

Приведенные уравнения дополняются начальными условиями[[44]](#endnote-44)



т.е. предполагается, что в начальный момент времени *t =* 0 зонд находится на земле и покоится, а его начальная масса равна *m*0. Тогда начальные условия принимают вид

В соответствии с полученными соотношениями зонд поднимается под действием силы тяги. Со временем все топливо сгорает, после чего зонд некоторое время летит по инерции, а затем падает вниз за счет силы тяготения. Рассматриваемые соотношения остаются в силе вплоть до некоторого момента времени *T*, когда зонд окажется на поверхности земли, а значит, будет удовлетворять условию *у*(*T*)=0.

Итак, математическая модель рассматриваемого процесса характеризуется двумя дифференциальными уравнениями, справедливыми на интервале времени от нуля до указанного момента *Т*, с указанными начальными условиями[[45]](#endnote-45). Параметрами системы являются сила тяги *R*0, время сгорания топлива *t\**, коэффициент сопротивления воздуха *k*, скорость сгорания топлива *β*0 и начальная масса зонда *m*0. К числу выходных параметров процесса, т.е. дополнительных характеристик, представляющих несомненный практический интерес, можно отнести максимальную высоту подъема зонда, время набора максимальной высоты, время приземления зонда и его скорость в момент приземления.

Отметим, что не при всех указанных значениях параметров процесса рассматриваемая математическая модель имеет смысл. Прежде всего, зонд непременно должен взлететь. Это означает, что сила, действующая на тело в начальный момент времени, должна быть положительной. Полагая в правой части уравнении движения *t=*0 и учитывая начальные условия, приходим к неравенству *R*0**>***m*0*g*. Таким образом, зонд взлетит лишь в том случае, когда сила тяги будет превышать его начальный вес.

Очевидно, в момент сгорания топлива масса зонда должна быть положительной. Интегрируя уравнение для массы от нуля до *t\** , получаем *m*(*t\**) –*m*0 *=* –β0*t\**.В результате получаем неравенство *m*0>β0*t\**, гарантирующему положительность массы при *t = t\** , т.е. полезной массы зонда. Итак, рассматриваемая математическая модель применима при выполнении указанных неравенств.

**Задание 1.1. *Движение зонда*.** Дать общую характеристику математической модели процесса полета зонда, построив таблицу, аналогичную Таблице 1.3.

#### **2. Полет ракеты**

Рассматривается движение баллистической ракеты, запущенной под некоторым углом к горизонту[[46]](#endnote-46). В этом случае движение тела уже не никак будет прямолинейным, поскольку на него оказывает влияние не только сила тяготения, направленная строго вниз, но и сила тяги *F*, действующая под некоторым углом к горизонту (см. Рис. 1.2). Положение ракеты будем характеризоваться горизонтальной координатой *x* и вертикальной координатой *y*. Точка старта ракеты выбирается в качестве начала координат. Тогда функции *x* = *x*(*t*) выражает расстояние от проекции точки, в которой находится ракета в данный момент времени, на горизонтальную плоскость (поверхность земли), до начала координат, а функция *y* = *y*(*t*) определяет высоту ракеты над землей. Для вывода уравнений движения необходимо записать второй закон Ньютона в векторной форме. Отметим, что в горизонтальном направлении будет действовать горизонтальная составляющая *Fx* силы тяги, а вертикальном – вертикальная составляющая силы тяги *Fy* и вес *Р* (см. Рис. 1.2). В отличие от предшествующего случая будем полагать, что масса топлива много меньше массы ракеты, так, что изменением массы в процессе движения ракеты можно пренебречь.



Рис. 1.2. Силы, действующие на ракету.

Согласно второму закону Ньютона ускорение тела в горизонтальном и вертикальном направлении будут пропорциональны соответствующим силам. В результате получаем следующую систему уравнений движения



Составляющие силы тяги вычисляются по формулам *Fx = F* cos*ϕ*, *Fy = F* sin*ϕ*, где *ϕ=ϕ*(*t*) – угол между направлением силы тяги и горизонтальной осью координат. Тем самым уравнения движения принимают вид



где *а = F/m* есть ускорение силы тяги. Сила тяги действует до тех пор, пока все топливо не сгорит. Время сгорания топлива *t\** считается известным. Тогда *a*(*t*) равно *а*0 (отношение силы тяги *F* к массе ракеты *m*,т.е. ускорение силы тяги) при *t*<*t\** и нулю в противном случае.

Предположим, что в начальный момент времени ракета находится в начале координат и покоится, что соответствует начальным условиям



Движение ракеты продолжается вплоть до некоторого момента времени *Т*, в который она приземлится, а значит, будет иметь нулевую вертикальную координату. Тем самым приходим к условию *y*(*Т*) = 0, из которого следует найти время приземления *Т*.

Параметрами рассматриваемой математической модели являются угол *u*, вообще говоря, зависящий от времени, отношение *а*0 и время сгорания топлива *t\**. Рассматриваемая математическая модель имеет смысл лишь в том случае, когда ее начальное вертикальное ускорение положительно (положительность горизонтальной составляющей вектора ускорения очевидна). Начальное ускорение в вертикальном направлении равно  Таким образом, приходим к следующему условию применимости модели 

**Задание 1.2. *Полет ракеты*.** Дать общую характеристику математической модели процесса полета ракеты (см. Таблица 1.3).

#### **3. Полет планера**

Рассмотрим движение планера в вертикальной плоскости. Оно происходит под действием сил тяготения, сопротивления воздуха, а также подъемной силы (см. Рис. 1.3). Сила сопротивления *F*1 считается пропорциональной скорости движения планера и направлена в противоположную сторону. Подъемная сила *F*2 пропорциональна квадрату вектора скорости и направлена перпендикулярно движению планера. В результате получаем уравнения

,

где *u* – горизонтальная скорость планера, *v* – вертикальная скорость, *μ* – коэффициент сопротивления, *b* – коэффициент подъемной силы.



Рис. 1.3. Силы, действующие на планер.

В начальный момент времени планер поднимается с земли (начало координат) с некоторой скоростью *w* под углом *ϕ* к горизонту. Таким образом, имеем начальные условия

*x*(0) = 0, *y*(0) = 0, *u*(0) = *w*cos*ϕ*, *v*(0) *= w*sin*ϕ*.

Движение планера продолжается вплоть до момента времени *Т*, когда он приземлится, т.е. когда будет выполнено равенство *y*(*Т*) = 0. Отметим, что движение планера происходит не для всех начальных состояний системы.

**Задание 1.3. *Полет планера*.** Дать общую характеристику математической модели процесса полета ракеты (см. Таблица 1.3).

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Различные аспекты взаимодействия математики с окружающим миром рассматриваются, например, в [Arnold1, Borovik, Bourbaki, Courant, Dyson, Frenkel, Gnedenko, Hadamard, Haken, Heisenberg1, Heisenberg2, Klinel, Kline2, Moiseev, Poincare, Russell, Steinhaus, Stewart,  StewartTall, Uspensky, Weyl, Wiener, Zadeh]. [↑](#endnote-ref-1)
2. В принципе, другие науки также оперируют с идеальными объектами. Материальная точка, абсолютно черное тело, сплошная среда и т.п. также являются абстракциями, не существующими в окружающем мире. Однако Математика оперирует исключительно с такими объектами, и этим отличается от других наук. [↑](#endnote-ref-2)
3. Общие вопросы математического моделирования рассматриваются, например, в [Anchordoqui, Andrews, Banerjee, Bender, Dym, Gershenfeld, Gould, Huckfeldt, Meerschaert, Moghadas, Mooney, Naimark, Oden, Ponomarev, Riley, SamarskiMihailov, serovajsky2000, Trusov, Witelski, Yaglom]. [↑](#endnote-ref-3)
4. Пример неассоциативности естественного умножения распределений приводится Л. Шварцем [Schwartz54]. [↑](#endnote-ref-4)
5. Философский смысл указанных проблем оснований математики излагается, например, М. Клайном [Klinel]. Проблемы философии математики рассматриваются, например, в Hart, Korner, Parsons. [↑](#endnote-ref-5)
6. О значении простоты при математическом моделировании явлений природы см. статью Ю.А. Наймарка [Naimark]. [↑](#endnote-ref-6)
7. О значении эстетики в научных исследования см. статью В. Гейзенберга [Heisenberg2]. [↑](#endnote-ref-7)
8. Понятно, наши рассуждения при выводе математической модели падения тела ничего общего с тем, чем руководствовался Галилей. [↑](#endnote-ref-8)
9. Процесс падения тела под действием собственного веса относится к ***классической механике***. С задачами классической механики и методами их математического и компьютерного моделирования можно познакомиться, например, в Anchordoqui, Buchholz, Gorban, Gould, Kittel, Knudsen, Landau, Lanczos, Oden, Riley, Witelski, см. также последующие две лекции. [↑](#endnote-ref-9)
10. Оно является ***уравнением***, поскольку представляет собой равенство, в которое входит неизвестная величина *у.* А дифференциальным его называют в силу того, что в это равенство входит в него производная от искомой величины. Более точно, мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение в отличие от уравнений с частными производными, рассматриваемыми в Части II. Некоторые проблемы теории дифференциальных уравнений будут рассматриваться в Лекциях № 2, № 5 и № 20, см. Arnold, Coddin, Hartman, Lefsch, Polyanin, Teschl, Zwill. [↑](#endnote-ref-10)
11. Говорят, что равенство (1.2) дает ***общее решение*** уравнения (1.1). Это означает, что все решения уравнения (1.1) и только они имеют указанный вид. [↑](#endnote-ref-11)
12. Мы получили ***задачу Коши***для рассматриваемого уравнения. [↑](#endnote-ref-12)
13. Тем самым определяется некоторое ***частное решение*** дифференциального уравнения. [↑](#endnote-ref-13)
14. Собственно, именно от такого эксперимента и отталкивался Галилей. [↑](#endnote-ref-14)
15. В дальнейшем уравнение падения тела будет выведено с помощью вариационного принципа наименьшего действия (см. Лекция № 15), что позволяет взглянуть на рассматриваемую проблему с несколько иных позиций. Более подробно эти вопросы рассматриваются в Landau1, Lanczos. Отметим также, что падение тела обусловлено действием гравитационного поля, особенности которого рассматриваются в Лекции № 13. [↑](#endnote-ref-15)
16. Простейшие задачи теплофизики рассматриваются в Лекциях № 10 и № 11, см. также Baier, Bailyn, Carslaw, Faghri, Incrop, Lykov, Olander, Rumer. [↑](#endnote-ref-16)
17. Некоторые задачи химической кинетики рассматриваются в Лекции № 6. [↑](#endnote-ref-17)
18. Экономическим моделям производства посвящены Лекции № 8 и № 16. [↑](#endnote-ref-18)
19. В качестве параметров процесса могут выступать не только числа, но и векторы и функции, считающиеся известными. Так, при описании движения материальной точки в пространства начальное положение описывается вектором, характеризующим координаты тела в пространстве в начальный момент времени, см. математические модели движения ракеты и планера в Приложении к данной лекции. А при исследовании процесса теплопереноса предполагается известной, а значит, является параметром системы начальное распределение температур. Она, вообще говоря, меняется от точки к точке рассматриваемого тела, а значит, характеризуется не числом, и даже не вектором, а функцией, см. Лекция № 10. [↑](#endnote-ref-19)
20. Различные принципы классификации математических моделей приводятся, например, в Gorban, Myshkis, Реierls, SamarskiMihailov, Sovetov. [↑](#endnote-ref-20)
21. С теорией интегральных уравнений можно ознакомиться в Atkinson, Krasnov, Polyanin. [↑](#endnote-ref-21)
22. Основы математического анализа описываются, например, в Apostol, Comen, Dunham, Howie, Larson, Telyak, Trench. [↑](#endnote-ref-22)
23. Дискретная математика рассматривается, например, в Biggs, Johnsonbaugh, Yablonsky. [↑](#endnote-ref-23)
24. О теории графов см. Bondy, Deo, Kepner. [↑](#endnote-ref-24)
25. Задачи комбинаторики рассматриваются, например, в Riordan, van Lint. [↑](#endnote-ref-25)
26. С булевой алгеброй можно познакомиться в Sikorski, Whitesitt. [↑](#endnote-ref-26)
27. Колебание маятника является предметом Лекции № 3. [↑](#endnote-ref-27)
28. Задача коммивояжера рассматривается в Лекции № 16. [↑](#endnote-ref-28)
29. Основы теории вероятностей излагаются, например, в Feller, Gut, Kallenberg. [↑](#endnote-ref-29)
30. Для описания конечномерного объекта применяется аппарат классического математического анализа, в то время как бесконечномерные системы исследуются с помощью ***функционального анализа***, см., например, Hutson, Kolmogorov, Reed. [↑](#endnote-ref-30)
31. Теория уравнений в частных производных описывается, например, в Farlow, Henry, Hor, Jost, Ladyz, Lions, Mikhlin, Pinch, Tihon, Vladim. [↑](#endnote-ref-31)
32. В частности, рассмотренная выше математическая модель падения тела представляет собой линейную систему, а приведенные в Приложении задачи о полете зонда и планера характеризуются нелинейными системами. [↑](#endnote-ref-32)
33. О вариационных неравенствах см. Duvaut, Glow, Kinder, а также Лекция № 15. [↑](#endnote-ref-33)
34. Вариационные принципы в физике описываются в Lanczos, Landau1, см. Лекция № 15. [↑](#endnote-ref-34)
35. С основами вариационного исчисления можно познакомиться в Bliss, Elsgolc, GelFom, Jost, Sagan, Young, см. также Лекция № 15. [↑](#endnote-ref-35)
36. Теория оптимального управления описывается, например, в Fletc, Gill, Ioffe, Kirk, Lewis, SerovBr, SerovCRC, Snyman, см. также Лекция № 21. [↑](#endnote-ref-36)
37. О теории игр см. Fernandez, Isaacs, Osborne, также Лекция № 16. [↑](#endnote-ref-37)
38. Общая теория некорректных задач рассматривается в Alifanov, Kabanikhin, Lattes, Lions85, TihonA. Примеры некорректных задач даются в Лекции № 20, см. также Chafee, Hadam, Henry. [↑](#endnote-ref-38)
39. Обратные задачи математической физики исследуются в Aster, Kabanikhin, Lattes см. также Лекция № 22. [↑](#endnote-ref-39)
40. Общая теория идентификации систем описывается в Eykhoff, Graupe. [↑](#endnote-ref-40)
41. Вопросы динамики полета достаточно подробно рассматриваются Muile. [↑](#endnote-ref-41)
42. Одна оптимизационная задача, связанная с полетом зонда, рассматривается в книге Lawden. [↑](#endnote-ref-42)
43. Мы еще вернемся ко второму закону Ньютона в Лекции № 15 при рассмотрении вариационных принципов. [↑](#endnote-ref-43)
44. У нас имеется одно дифференциальное уравнение второго порядка, а второе – первого. ***Порядок дифференциального уравнения*** соответствует максимальному порядку входящей в него производной от неизвестной функции. Для решения этого уравнения требуется задание дополнительных условий в количестве, равном порядку уравнения. [↑](#endnote-ref-44)
45. В отличие от рассмотренной ранее математической модели падение тела, в данном случае мы имеем дело с нелинейной системой. Мы предполагали, что зависимость силы сопротивления от скорости является квадратичной. Процедура возведения в квадрат искомой функции является нелинейной. С квадратичными нелинейностями мы будем работать в последующих главах. В частности, это относится к уравнению Ферхюльста, описывающему эволюцию биологического вида при ограниченности имеющейся пищи (см. Лекция № 7). Нелинейной является также и имеющаяся в уравнении процедура взятие модуля от неизвестной функции. [↑](#endnote-ref-45)
46. К математической модели движения ракеты мы вернемся в Лекции № 21, где будет исследована задача определения такого угла, при котором ракета улетит как можно дальше, рассматриваемая в книге Lawden [71]. [↑](#endnote-ref-46)